Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Reversão temporal

Teorema 1

Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz irredutível e não explosiva, e suponha que λ seja uma distribuição invariante para $\mathbf{Q}$. Seja $T > 0$ e $(X_t)_{0\leq t\leq T} \sim \mathrm{PMS}(\lambda, \mathbf{Q})$, e façamos $\hat{X}_t = X_{T-t}$, $0 \leq t \leq T$.

Então $(\hat{X}_t)_{0\leq t\leq T} \sim \mathrm{PMS}(\lambda, \hat{\mathbf{Q}})$, onde $\hat{\mathbf{Q}} = (\hat{q}_{xy})_{x,y\in\mathcal{S}}$, com

$$\lambda_x \hat{q}_{xy} = \lambda_y q_{yx},\ x, y \in \mathcal{S}. \tag{$*$}$$

Além disto, $\hat{\mathbf{Q}}$ é irredutível e não explosiva, e λ é invariante para $\mathbf{Q}$.

Dem. Pelo Teo 5 do Álbum 18 (Teo 2.8.6 do livro), o semigrupo $(\mathbf{P}(t))$ é a solução mínima não negativa da equação avançada

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q},\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}. \tag{1}$$

Segue da não explosividade que $\mathbf{P}(t)$ é uma matriz estocástica irredutível e com distribuição invariante λ (e logo recorrente) para cada $t > 0$.

Dem. Teo 1 (cont)

Seja

$$\lambda_x \hat{P}_{xy}(t) = \lambda_y P_{yx}(t). \tag{2}$$

Então, pelo Teo 1 do Álbum 7, $\hat{\mathbf{P}}(t)$ é uma matriz estocástica irredutível e com distribuição invariante λ.

Temos de $(*)$, (1) e (2) que

$$\hat{\mathbf{P}}'(t) = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{P}}(t),\ \hat{\mathbf{P}}(0) = \mathbf{I} \tag{3}$$

(verifique!), que é a equação atrasada para $\hat{\mathbf{Q}}$, que é uma Q-matriz (verifique!), e logo da minimalidade de $(\mathbf{P}(t))$ segue que $(\hat{\mathbf{P}}(t))$ é a solução mínima não negativa de (3). Logo $(\hat{\mathbf{P}}(t))$ é o semigrupo associado a $\hat{\mathbf{Q}}$.

Dem. Teo 1 (cont)

Como $\mathbf{Q}$ é irredutível e $\lambda_x > 0 \; \forall \; x$, temos de $(*)$ e do Teo 1 do Álbum 19 que $\hat{\mathbf{Q}}$ é irredutível.

Da recorrência de $\mathbf{Q}$, segue a recorrência de $\mathbf{P}(t)$, e do Teo 1 do Álbum 7, temos que $\hat{\mathbf{P}}(t)$ é irredutível e tem distribuição invariante λ; segue que $\hat{\mathbf{P}}(t)$ é recorrente; pelo Teo 5 do Álbum 19, $\hat{\mathbf{Q}}$ é recorrente; segue disso e da irredutibilidade que $\hat{\mathbf{Q}}$ é não explosiva e tem distribuição invariante λ.

Agora, para $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$, fazendo $s_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$, temos

$$\mathbb{P}(\hat{X}_{t_0} = x_0, \ldots, \hat{X}_{t_n} = x_n) = \mathbb{P}(\hat{X}_{T-t_0} = x_0, \ldots, \hat{X}_{T-t_n} = x_n)$$

$$= \lambda_{x_n} P_{x_n x_{n-1}}(s_n) \cdots P_{x_1 x_0}(s_1) = \lambda_{x_0} \hat{P}_{x_1 x_0}(s_1) \cdots \hat{P}_{x_n x_{n-1}}(s_n),$$

e do Teo 4 do Álbum 18 segue que

$$(\hat{X}_t)_{0 \le t \le T} \sim \mathrm{PMS}(\lambda, \hat{\mathbf{Q}}). \qquad \square$$

Equilíbrio detalhado; reversibilidade

Def. Uma Q-matrix $\mathbf{Q}$ e uma medida λ em $\mathcal{S}$ são ditas estar *em equilíbrio detalhado* se

$$\lambda_x q_{xy} = \lambda_y q_{yx} \ \forall \ x, y \in \mathcal{S}. \tag{4}$$

Lema 2

Se $\mathbf{Q}$ e λ estiverem em equilíbrio detalhado, então λ é invariante para $\mathbf{Q}$.

Dem.

$$(\lambda \mathbf{Q})_x = \sum_{y \in \mathcal{S}} \lambda_y q_{yx} \stackrel{(4)}{=} \sum_{y \in \mathcal{S}} \lambda_x q_{xy} = \lambda_x \sum_{y \in \mathcal{S}} q_{xy} = 0,$$

e temos que $\lambda \mathbf{Q} = \mathbf{0}$. $\square$

Def. Seja $(X_t) \sim \text{PMS}(\lambda, \mathbf{Q})$, com $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz irredutível e não explosiva, e λ uma distribuição em $\mathcal{S}$. Diremos que (X_t) é *reversível* se $(X_{T-t})_{0 \le t \le T} \sim \text{PMS}(\lambda, \mathbf{Q})$ para todo $T \ge 0$.

Teorema 2

Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz irredutível e não explosiva, e λ uma distribuição em $\mathcal{S}$. Suponha que $(X_t) \sim \text{PMS}(\lambda, \mathbf{Q})$.
São equivalentes

(a) (X_t) é reversível;

(b) $\mathbf{Q}$ e λ estão em equilíbrio detalhado.

Dem. (a) e (b) ambas implicam que λ é invariante para $\mathbf{Q}$.
Então (a) e (b) ambas são equivalentes a dizer que

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \text{ no Teo 1.}$$

$\square$

Teorema Ergódico

Teorema 3 (Teorema Ergódico)

Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz irredutível, e ν uma medida qualquer em $\mathcal{S}$ *, e suponha que $(X_t) \sim \text{PMS}(\nu, \mathbf{Q})$. Então para todo $x \in \mathcal{S}$

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}\{X_s = x\}\, ds \to \frac{1}{m_x q_x} \text{ quando } t \to \infty \text{ qc,} \tag{5}$$

onde $m_x = \mathbb{E}_x(\mathcal{T}_x)$. Além disto, no caso recorrente positivo, se $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ for limitada, temos que

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)\, ds \to \bar{f} = \sum_{x \in \mathcal{S}} f(x)\lambda(x) \text{ quando } t \to \infty \text{ qc,} \tag{6}$$

onde λ é a única distribuição invariante para $\mathbf{Q}$.

* $|\mathcal{S}| \geq 2$

Dem. Teo 3

Se x for transitório, então

$$\frac{1}{t}\int_0^t 1\{X_s = x\}\,ds \leq \frac{1}{t}\overbrace{\int_0^\infty \mathbb{1}\{X_s = x\}\,ds}^{<\infty} \to 0 = \frac{1}{m_x q_x} \text{ qdo } t \to \infty \text{ qc.}$$

Vamos supor então que x é recorrente. Vê-se prontamente que a proporção assintótica do tempo passado em x a partir do tempo 0 é a mesma do que aquela a partir de $\mathcal{T}_x$ ($< \infty$ qc); logo, basta considerar o caso em que $\nu = \delta_x$.

Sejam $L_1, L_2, \ldots$ as durações das sucessivas visitas de (X_t) a x, e $M_1, M_2, \ldots$ as durações dos sucessivos períodos gastos por (X_t) entre visitas a x: $R_0 = 0$ e para $n \geq 0$

$$L_{n+1} = \inf\{t > R_n : X_t \neq x\} - R_n;$$
$$R_{n+1} = \inf\{t > R_n + L_{n+1} : X_t = x\};\ M_{n+1} = R_{n+1} - R_n.$$

Dem. Teo 3 (cont)

Pela PFM:

$$\begin{cases} L_1, L_2, \ldots \text{ iid } \sim \text{ Exp}(q_x); \\ M_1, M_2, \ldots \text{ iid, } \mathbb{E}(M_1) = m_x. \end{cases}$$

Pelo LFGN

$$\frac{L_1 + \cdots + L_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{qc} \frac{1}{q_x}, \quad \frac{M_1 + \cdots + M_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{qc} m_x,$$

e logo

$$\frac{L_1 + \cdots + L_n}{M_1 + \cdots + M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{qc} \frac{1}{m_x q_x}, \tag{7}$$

e $\frac{L_{n+1}}{R_n} \xrightarrow[n\to\infty]{qc} 0$, e, se $m_x < \infty$, $\frac{R_n}{R_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{qc} 1.$ (8)

Dem. Teo 3 (cont)

Logo, para $R_n \leq t < R_{n+1}$ temos

$$\frac{R_n}{R_{n+1}} \frac{L_1 + \cdots + L_n}{M_1 + \cdots + M_n} \leq \frac{1}{t} \int_0^t 1\{X_s = x\}\, ds \leq \frac{L_1 + \cdots + L_n}{M_1 + \cdots + M_n} + \frac{L_{n+1}}{R_n},$$

e (5) segue de (7) e (8).

No caso recorrente positivo,

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(X_s)\, ds - \bar{f} = \sum_{x \in \mathcal{S}} f(x) \Big(\frac{1}{t} \int_0^t 1\{X_s = x\}\, ds - \lambda_x \Big) \xrightarrow[n\to\infty]{qc} 0$$

pelo mesmo argumento usado na prova do Teo 2.b do Álbum 7 (Teorema 1.10.2 do livro), observando que $\lambda_x = \frac{1}{m_x q_x}$.